

Control No Lineal de la Dinámica Longitudinal de un Helicóptero a Escala Reducida

J. G. Benítez-Morales^{(†)(‡)}, H. Rodríguez-Cortés^(†), R. Castro-Linares^(†)

(†)Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, Av. Instituto Politécnico Nacional No 2508, Col. San Pedro Zacatenco 07360 México, DF, {jbenitez,hrodriguez,rcastro}@cinvestav.mx.

(‡) Universidad Politécnica de Pachuca

Carretera Pachuca-Cd. Sahagún, km. 20, Ex-hacienda de Santa Bárbara, Municipio de Zempoala Hgo.

Resumen— Este artículo presenta una estrategia de control no lineal para la dinámica longitudinal de un helicóptero a escala reducida. La estrategia de control se basa en el algoritmo introducido en (Rodríguez, Astolfi y Ortega, 2006) para construir reguladores estáticos para sistemas linealizables por retroalimentación dinámica de estados. Las propiedades de planitud diferencial de la dinámica longitudinal se emplean para diseñar las trayectorias deseadas. Aunado a esto, se muestra la colocación de las entradas de control en los mandos del sistema real, y como la dinámica del rotor puede ser sustituida por una relación algebraica.

Palabras clave: Helicóptero a escala reducida, Planitud diferencial, Control acotado.

I. INTRODUCCIÓN

En los recientes años, la comunidad científica a enfocado sus esfuerzos para realizar vuelos autónomos de aeronaves de ala rotatoria, entre las cuales destacan los helicópteros escala reducida y los cuadri-rotors. Estas aeronaves sobresalen por su capacidad de vuelo estacionario. Por lo tanto son adecuados para aplicaciones de vigilancia, inspección, transporte, reconocimiento y rescate.

Los avances científicos y tecnológicos en este tipo de aeronaves se han dado en diferentes formas como son: el uso de nuevos materiales para la construcción de la aeronave, nuevas configuraciones en la arquitectura de los rotores, miniaturización de los sensores, actuadores y dispositivos lógicos programables, además de la implementación de nuevas técnicas de control no lineal y lineal. Todo esto ha facilitado la realización del vuelo autónomo (Ollero, Hommel, Gancet, Gutierrez, Viegas, Wiklund and González, 2004) (Cai, Feng, Chen and Lee, 2004).

En el área de control automático se han realizado diferentes trabajos para el diseño de estrategias de control del helicóptero a escala reducida basados en su modelo dinámico, el cual es frecuentemente reducido con la finalidad de ajustarlo para la implementación de la técnica de control. En esta variedad de modelos simplificados sobresale el modelo PVTOL, que es un modelo de seis grados de libertad, que involucra la dinámica longitudinal. Los trabajos descritos a continuación emplean el modelo PVTOL (de despegue y aterrizaje verticales en un plano) para el diseño de sus estrategias de control.

El trabajo de (Martin, Devasia y Paden, 1996) está dividido en dos partes. La primera consiste en el diseño de un controlador para que los estados sigan una trayectoria mediante la salida plana. La segunda parte consiste en la generación de una trayectoria deseada, la cual tiene que ser acotada para la variable de cabeceo de la aeronave.

En el trabajo de (Castro y Sira, 2000) se realiza una planificación de trayectoria mediante la utilización del modelo dinámico linealizado alrededor de la trayectoria deseada que va de un punto en vuelo estacionario a un segundo punto en vuelo estacionario. Además, las características del sistema Liouvillian¹ son utilizadas para realizar una planeación de trayectorias fuera de línea, resultando los estados y entradas de control nominales para la trayectoria. El sistema es estabilizado por medio de un control de retroalimentación de estados.

En (Fantoni y Lozano, 2002), simplifican el modelo del PVTOL al eliminar a una de las entradas en las ecuaciones de desplazamiento para no tener acoplamiento entre el alabeo y la aceleración lateral. Posteriormente, se realiza una extensión dinámica del sistema para tener a una matriz de desacoplado de rango completo, dando como resultado un sistema de octavo orden. Después aplican un control por retroalimentación de estados para las variables de traslación sigan a la trayectoria deseada. Igualmente, proponen una estrategia de control basados en el Forwarding.

El artículo está organizado por secciones, las cuales se describen a continuación. La sección II exhibe un modelo dinámico del helicóptero a escala reducida. En la sección III se describen las fuerzas y pares externos aplicados al helicóptero y se mencionan las reducciones necesarias al modelo completo del sistema para obtener el modelo en el plano longitudinal. En la sección IV se presenta el diseño de la técnica de control. La sección V muestra las simulaciones numéricas del comportamiento de la dinámica en el lazo cerrado resultante. Finalmente se presentan algunas conclusiones.

¹Los sistemas liouvillian son una extensión de natural de los sistemas diferencialmente planos, los cuales no son linealizables mediante una retroalimentación endógena

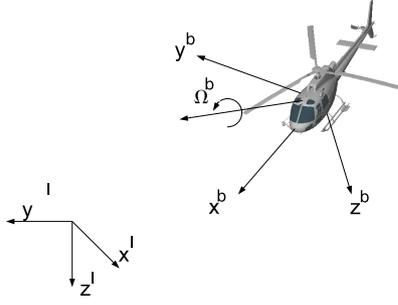


Figura 1: Sistema de coordenadas en el helicóptero.

II. MODELO DINÁMICO DEL HELICÓPTERO

La especificación de la posición, velocidad y aceleración de un helicóptero a escala reducida se realiza mediante el uso de un marco de referencia inercial y un marco de referencia cuerpo. El marco de referencia inercial, también llamado marco de referencia tierra se denota por $f^I = [x^I \ y^I \ z^I]$ y se coloca en un punto específico sobre la superficie de la tierra, donde el eje x^I está en dirección norte, el eje y^I está en dirección este y el eje z^I apunta en dirección al centro de la tierra. El marco de referencia cuerpo denotado como $f^b = [x^b \ y^b \ z^b]$, tiene su origen en el centro de gravedad (C.G.) del helicóptero a escala reducida. La dirección de z^b apunta en sentido opuesto al sentido de la velocidad del rotor principal, mientras que el eje x^b está la dirección longitudinal y el eje y^b se coloca en la dirección lateral del vehículo. Estos sistemas de coordenadas se muestran en la figura 1.

El fuselaje del helicóptero es modelado como un cuerpo rígido en un espacio de tres dimensiones con respecto al marco de referencia cuerpo. Las ecuaciones que describen los movimientos traslacionales son: (Padfield, 1996)

$$\begin{aligned} X/m &= \dot{u} + qw - rv \\ Y/m &= \dot{v} + ru - pw \\ Z/m &= \dot{w} + pv - qu \end{aligned} \quad (1)$$

donde u , v , y w son la velocidad longitudinal, lateral y vertical respectivamente, m es la masa del helicóptero. Las fuerzas externas $f^b = [X \ Y \ Z]^T$ están expresadas con respecto al marco de referencia cuerpo, donde X , Y y Z indican las componentes del empuje del rotor principal y del rotor de cola en las direcciones longitudinal, lateral y vertical respectivamente, mientras que el movimiento rotacional está dado por (Padfield, 1996)

$$\begin{aligned} L &= I_{xx}\dot{p} + qr(I_{zz} - I_{yy}) - I_{xz}(\dot{r} + pq) \\ M &= I_{yy}\dot{q} + pr(I_{xx} - I_{zz}) + I_{xz}(p^2 - r^2) \\ N &= I_{zz}\dot{r} + pq(I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz}(qr - \dot{p}) \end{aligned} \quad (2)$$

donde p , q y r son las velocidades angulares con respecto a los ejes x^b , y^b y z^b respectivamente, I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} son

los momentos de inercia, I_{xz} es el producto de inercia, por último se tiene que L , M y N son los pares aplicados en los ejes x^b , y^b and z^b respectivamente.

Las velocidades angulares están relacionadas con la orientación del helicóptero mediante los ángulos de Euler $\Theta = [\phi \ \theta \ \psi]$, donde ϕ , θ y ψ son el alabeo, el cabeceo y el guiñado de la aeronave en la secuencia de rotación ZYX (Kuipers, 1999). La velocidad de los ángulos de Euler está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & -\sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3)$$

II-A. Posición y velocidad con respecto al marco de referencia inercial

Las velocidades en (1) son expresadas con respecto al marco de referencia cuerpo y no indican la posición relativa al marco de referencia inercial. La matriz de rotación, R , define la relación entre ambos sistemas de coordenadas, y se expresa como

$$R = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

donde la notación se establece como $sx = \sin x$ y $cx = \cos x$. Las fuerzas externas pueden ser representadas en un marco de referencia inercial mediante la matriz de rotación R , tal como se muestra a continuación.

$$f^I = R^T f^b \quad (4)$$

Similarmente, las velocidades de traslación $v^I = [v_x^I \ v_y^I \ v_z^I]$ y la posición $p^I = [x \ y \ z]$ con respecto al marco de referencia inercial están dadas por (Raptis, 2010)

$$\begin{aligned} \dot{p}^I &= v^I \\ \dot{v}^I &= \frac{1}{m} f^I \end{aligned} \quad (5)$$

II-B. Dinámica del rotor principal y la barra estabilizadora

El modelo dinámico del rotor principal conjuntamente con la barra estabilizadora está compuesto por dos ecuaciones de primer orden que describen la inclinación del rotor principal considerando las características aerodinámicas de las palas del helicóptero. Estas ecuaciones están dadas por (Mettler, 1996)

$$\begin{aligned} \tau_f \dot{a} &= -a \left(1 + \frac{\mu^2}{2} \right) - \tau_f q + \frac{p}{\Omega} + A_b b + A_{lat} \delta_{lat} \\ &\quad + A_{lon} \delta_{lon} (1 + 3\mu^2) + A_{lon} k_c c (1 + 3\mu^2) + \lambda_{1c} \\ \tau_f \dot{b} &= -b \left(1 + \frac{\mu^2}{2} \right) - \tau_f p - \frac{q}{\Omega} - B_a a + B_{lon} \delta_{lon} \\ &\quad + B_{lat} \delta_{lat} (1 + \mu^2) + B_{lat} k_d d (1 + \mu^2) + \lambda_{1s} \end{aligned} \quad (6)$$

donde Ω es la velocidad angular del rotor principal, a y b representan la inclinación logintudinal y lateral del plano definido por la trayectoria de la punta de pala. d y c son la inclinación logintudinal y lateral de la barra estabilizadora. A_{lat} y B_{lon} son términos constantes que dependen del acoplamiento mecánico entre los mandos de entrada y las palas, δ_{lat} y δ_{lon} son las entradas ciclicas lateral y longitudinal. λ_{1c} y λ_{1s} son las componentes longitudinales y laterales de la velocidad inducida no dimensional. El término $A_b = -B_a$ es el número de rigidez definido por $A_b = \frac{8}{\gamma} (\lambda_\beta^2 - 1)$ donde el término λ_β está dado por $\lambda_\beta = 1 + \frac{k_\beta}{I_\beta \Omega^2}$, k_β es la constante de rigidez en la unión de la pala con el mástil y I_β es el momento de inercia de la pala con respecto al eje de aleo. μ es la relación de avance dado por $\mu = \frac{u}{R_b \Omega}$. Por último, τ_f es la constante de tiempo del rotor, dada por $\tau_f = \frac{16}{\gamma \Omega}$ siendo γ el número de Lock, el cual se expresa como $\gamma = \frac{\rho c_b C_{l\alpha} R_b^4}{I_\beta}$. En está expresión ρ es la densidad del aire, c_b es la cuerda de la pala, $C_{l\alpha}$ es el coeficiente de empuje, y R_b es el radio del rotor.

III. FUERZAS Y PARES EXTERNOS

Las fuerzas externas aplicadas al helicóptero se deben principalmente al empuje del rotor principal y del rotor de cola, conjuntamente con la fuerza de gravedad. Hay otras fuerzas, las cuales en este trabajo no se consideran, tales como la fuerza aerodinámica provocada por el rozamiento entre el aire y el fuselaje. Las fuerzas externas pueden ser expresadas como

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M + Y_T \\ Z_M \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (7)$$

En (7), las componentes de la fuerza son expresadas en el marco de referencia cuerpo, donde X_M , Y_M y Z_M son las componentes del empuje del rotor principal, mientras que Y_T es el empuje del rotor de cola.

El empuje del rotor principal es considerado perpendicular al plano definido por la trayectoria de la punta de pala (Layton, 1984). Entonces, la inclinación del plano definido por la trayectoria de la punta de pala puede describirse usando la orientación del empuje en la forma siguiente (Fantoni y Lozano, 2002)

$$\begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin a \cos b \\ \cos a \sin b \\ -\cos a \cos b \end{bmatrix} T_{MR} \approx \begin{bmatrix} -a \\ b \\ -1 \end{bmatrix} T_{MR} \quad (8)$$

donde T_{MR} es el empuje del rotor principal. Los pares externos dependen del empuje del rotor de principal y de cola, la rigidez entre la unión del mástil y las palas, y por último, los pares de reacción debido a la rotación del rotor principal y del rotor de cola. La expresión matemática para los pares externos está dados por (Koo y Sastry, 1998)

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_M \\ M_M + M_T \\ N_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_M h_M + Z_M y_M + Y_T h_T \\ -X_M h_M + Z_M l_M \\ -Y_M l_M - Y_T l_T \end{bmatrix} \quad (9)$$

Los términos (l_M, y_M, h_M) y (l_T, y_T, h_T) son las distancias desde el centro de gravedad hasta el punto de aplicación del empuje del rotor principal y del rotor de cola, respectivamente. Los pares L_M , M_M y N_M están dados por (Koo y Sastry, 1998)

$$\begin{aligned} L_M &= k_\beta b - Q_M \sin(a) \\ M_M &= k_\beta a + Q_M \sin(b) \\ N_M &= -Q_M \cos(a) \cos(b) \\ M_T &= -Q_T \end{aligned}$$

donde $k_\beta b$ y $k_\beta a$ son los pares inducidos por la rigidez del rotor principal, Q_M es el par de reacción del rotor principal, y Q_T es el par de reacción debido al rotor de cola.

III-A. Reducción del modelo dinámico

La reducción del modelo dinámico se realiza con el objetivo de obtener el modelo del sistema en el plano $x^I z^I$. En este plano, el movimiento lateral es nulo, por lo tanto, $y = 0$ m, $v = 0$ m/s y $Y = 0$ N. También se considera que los movimientos angulares de alabeo y guiñada son nulos de manera que $\phi = \psi = 0$ rad, $p = r = 0$ rad/s y $L = N = 0$ N. La dinámica del rotor principal y de la barra estabilizadora se hace compatible con el movimiento en el plano $x^I z^I$ al considerar $b = 0$. Por lo tanto bajos estas consideraciones el modelo descrito por (6), (9), (2), (5) y (7) queda como:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sin(\theta)Z_M + \cos(\theta)X_M \\ m\ddot{z} &= mg + \cos(\theta)Z_M - \sin(\theta)X_M \\ I_{yy}\ddot{\theta} &= -l_h X_M + l_M Z_M + k_\beta a - Q_T \\ \tau_f \dot{a} &= -a \left(1 + \frac{\mu^2}{2} \right) - \tau_f \dot{\theta} + A_{lon} \delta_{lon} (1 + 3\mu^2) \\ &\quad + A_{lon} k_c c (1 + 3\mu^2) + \lambda_{1c} \end{aligned} \quad (10)$$

El modelo en (10) se simplifica con la intención de diseñar una estrategia de control. La simplificación consiste en que Q_T , k_β y l_M son cero. Además, se considera que la dinámica de a es mucho más rápida que la dinámica de x , z , y θ . Finalmente, sustituyendo $X_M = -a T_{MR}$ y $Z_M = -T_{MR}$ en (10) se tiene

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -\sin(\theta)T_{MR} - \cos(\theta)aT_{MR} \\
m\ddot{z} &= mg - \cos(\theta)T_{MR} + \sin(\theta)aT_{MR} \quad (11) \\
I_{yy}\ddot{\theta} &= l_h a T_{MR}
\end{aligned}$$

donde $[x, \dot{x}] \in \mathcal{R}^2$, $[z, \dot{z}] \in \mathcal{R}^2$ y $[\theta, \dot{\theta}] \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathcal{R}$

IV. ESTRATEGIA DE CONTROL

El modelo dinámico representado por las ecuaciones (11) es un sistema diferencialmente plano como se muestra en (Martín, Devasia y Paden, 1996). Se considera que los parámetros del modelo son conocidos y los estados del modelo reducido son medibles. Aunado a esto, se redefinen a las entradas del sistema como $u_1 = aT_{MR}$ y $u_2 = T_{MR}$, donde u_1 es la componente horizontal del empuje, el cual es manejado por el mando ciclico longitudinal, mientras que u_2 es la componente vertical del empuje, el cual es controlado por el mando colectivo (ver ecuaciones (8)). Las salidas planas del sistema son:

$$\begin{aligned}
P_x &= x + \frac{I_{yy}}{l_h m} \sin(\theta) \quad (12) \\
P_z &= z + \frac{I_{yy}}{l_h m} \cos(\theta)
\end{aligned}$$

La verificación de que el sistema es diferencialmente plano, se hace al expresar a los estados del sistema en terminos de la salida plana, más precisamente por

$$\begin{aligned}
\theta &= \arctan\left(\frac{\ddot{P}_x}{\ddot{P}_z}\right) \\
x &= P_x - \frac{I_{yy}}{l_h m} \frac{\ddot{P}_x}{\sqrt{\ddot{P}_x^2 + (\ddot{P}_z - g)^2}} \\
z &= P_z - \frac{I_{yy}}{l_h m} \frac{\ddot{P}_z}{\sqrt{\ddot{P}_x^2 + (\ddot{P}_z - g)^2}}
\end{aligned}$$

Enseguida, se define el error en función de la salida plana, quedando como

$$z_1 = P_z - P_{zd}; \quad x_1 = P_x - P_{xd}$$

por lo tanto

$$z_2 = \dot{P}_z - \dot{P}_{zd}; \quad x_2 = \dot{P}_x - \dot{P}_{xd}$$

Puede fácilmente verificarse que

$$\begin{aligned}
\ddot{z}_2 &= g - \frac{\cos(\theta)}{m} \left[u_1 + \frac{I_{yy}}{l_h} \dot{\theta}^2 \right] - \ddot{P}_{zd} \quad (13) \\
\ddot{x}_2 &= -\frac{\sin(\theta)}{m} \left[u_1 + \frac{I_{yy}}{l_h} \dot{\theta}^2 \right] - \ddot{P}_{xd}
\end{aligned}$$

Notar que la matriz de desacoplamiento es singular. Una matriz de desacoplamiento de rango completo puede construirse por medio de una extensión dinámica, tal como se

muestra en (Martín, Devasia y Paden, 1996). Sin embargo, en esta ocasión se propone una forma diferente de obtener la estrategia de control evitando la extensión dinámica a través de lo propuesto en (Rodríguez, Astolfi y Ortega, 2006). Por lo tanto definiendo a u_1 como

$$u_1 = -\frac{I_{yy}}{l_h} \dot{\theta}^2 + \frac{m}{\cos(\theta)} \left[g - \ddot{P}_{zd} + \gamma_z(z_1, z_2, t) \right]$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= -\gamma_z(z_1, z_2, t) \\
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\tan(\theta) \left[g - \ddot{P}_{zd} + \gamma_z(z_1, z_2, t) \right]
\end{aligned}$$

Posteriormente la segunda entrada de control es obtenida a partir de error de la salida plana P_x , el cual derivamos hasta encontrar la segunda entrada del sistema. Definiendo

$$\begin{aligned}
x_3 &= \dot{x}_2 = \ddot{P}_x - \ddot{P}_{xd} \\
x_4 &= \dot{x}_3 = P_x^{(3)} - P_{xd}^{(3)}
\end{aligned}$$

La entrada de control aparece hasta la cuarta derivada como se observa a continuación

$$\dot{x}_4 = P_x^{(4)} - P_{xd}^{(4)}$$

donde

$$\begin{aligned}
P_x^{(4)} &= \left(g - \ddot{P}_{zd} + \gamma_z \right) (1 + \tan^2 \theta) \left[-\frac{l_h}{I_{yy}} u_2 + 2 \tan(\theta) \dot{\theta}^2 \right] \\
&\quad - 2 (1 - \tan^2(\theta)) \left[-P_{zd}^{(3)} + \dot{\gamma}_z \right] \dot{\theta} - \tan(\theta) \left[-P_{zd}^{(4)} + \dot{\gamma}_z^{(2)} \right]
\end{aligned}$$

definiendo a u_2 como

$$u_2 = \frac{I_{yy}}{l_h} \left(2 \tan(\theta) \dot{\theta}^2 + v_2 + A \right) \quad (14)$$

donde A está dada por

$$A = \frac{A1 + A2}{\left(g - \ddot{P}_{zd} + \gamma_z \right) (1 + \tan^2 \theta)} \quad (15)$$

mientras que $A1$ y $A2$ son

$$\begin{aligned}
A1 &= 2 (1 + \tan^2 \theta) \left(-P_{zd}^{(3)} + \dot{\gamma}_z \right) \dot{\theta} \\
A2 &= \tan \theta \left(-P_{zd}^{(4)} + \dot{\gamma}_z^{(2)} \right)
\end{aligned}$$

El regulador v_2 de la ecuación (14) se propone de la siguiente forma

$$v_2 = P_{xd}^{(4)} - k_4 x_4 - k_3 x_3 - k_2 x_2 - k_1 x_1 \quad (16)$$

Nótese que el término $g - \ddot{P}_{zd} + \gamma_z$ de la ecuación (15) no debe cruzar por cero, esto se logra si

$$g - \ddot{P}_{zd} + \gamma_z > 0$$

$$g + \gamma_z > \ddot{P}_{zd}$$

por lo tanto, γ_z debe satisfacer esta condición. Para lograrlo se propone un control acotado basado en los trabajos de (Kaliora y Astolfi, 2004)

$$\gamma_z = \frac{\epsilon_z}{2} \left[\tanh\left(\frac{2\lambda_{z1}}{\epsilon_z} z_1\right) + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{4\lambda_{z2}}{\epsilon_z} z_2\right) \right] \quad (17)$$

mediante la adecuada selección de las constantes de λ_{z1} , λ_{z2} y ϵ_z .

El sistema en lazo cerrado queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\gamma_2 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 - k_4 x_4 \end{aligned}$$

comparando el resultado obtenido por (Martin, Devasia y Paden, 1996), el modelo en lazo cerrado es reducido de un octavo orden a un sexto orden.

V. SIMULACIÓN

Las simulaciones se realizarán considerando los siguientes parámetros del helicóptero a escala reducida: $m=1.2$ kg, $l_h=1.9$ m, $I_{yy}=0.1$ kg $-m^2$ y $g=9.81$ m/s. El controlador propuesto lleva a los errores de las salidas planas a cero, sin embargo recordemos que el objetivo de este trabajo es controlar la posición del helicóptero en el plano $x^I y^I$. De la ecuación (12) puede observarse que dadas x_d y z_d no es posible definir de forma explícita a P_{xd} y P_{zd} , se tienen dos ecuaciones y tres incógnitas. La solución a este problema es a través de la creación de las trayectorias deseadas de x_d y z_d mediante el polinomio de Bézier, mientras que θ_d se obtiene a partir de resolver la ecuación diferencial siguiente (Castro y Sira, 2000)

$$\ddot{\theta}_d = -\frac{ml_h}{I_{yy}} (\ddot{x}_d \cos \theta_d + \ddot{z}_d \sin \theta_d)$$

la cual es obtenida a partir del modelo dinámico (11) al despejar a u_1 de la primera ecuación (recordar que $u_1 = aT_{MR}$ y $u_2 = T_{MR}$), por lo tanto, $u_1 = -\frac{M}{\sin(\theta)} \left(\ddot{x} + \frac{1}{M} \cos(\theta) u_2 \right)$. Esta expresión es sustituida en la segunda ecuación de (11), para obtener $\ddot{y} = g + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \ddot{x} + \frac{1}{M \sin(\theta)} u_2$, después sustituye a u_2 a partir de la tercera ecuación de (11). Finalmente, se reemplazan los estados y sus derivadas con respecto al tiempo por las trayectorias deseadas y sus derivadas con respecto al tiempo.

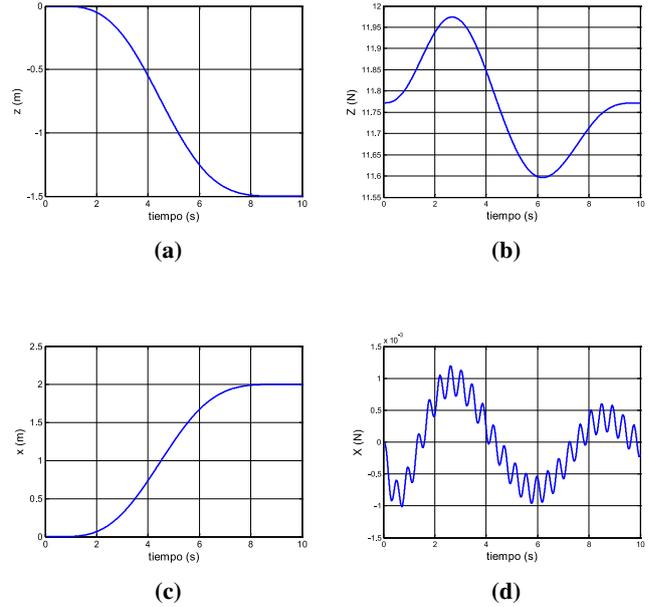


Figura 2: (a) Seguimiento de trayectorias sobre el eje z^I , (b) señales de control de u_2 , (c) Seguimiento de trayectorias sobre el eje x^I , (d) Señal de control u_1 .

En las simulaciones se utilizaron las siguientes ganancias para el regulador (17), las cuales son: $\epsilon_z = 10$, $\lambda_{z1} = 80$, $\lambda_{z2} = 18$, mientras que el regulador (16) tiene las ganancias $k_1 = 16$, $k_2 = 32$, $k_3 = 24$ y $k_4 = 8$, las cuales son obtenidas basandonos en los coeficientes del polinomio $(s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2)^2$ y con los valores de $w_n = 2$ y $\zeta = 0,7$.

Las simulaciones muestran como los estados del sistema siguen adecuadamente a las trayectorias deseadas desde un vuelo estacionario inicial hasta un vuelo estacionario final. La figura 2a muestra el desplazamiento de la altitud partiendo de una posición de nivel de piso hasta una posición de -1.5 m. en un tiempo de 10 s. La señal de control se presenta en la figura 2b.

El seguimiento de trayectoria con respecto al eje x^I se muestra en la figura 2c, donde parte de una posición de 0 cm hasta una posición de 2 m., en un tiempo de 10 s.

El seguimiento del ángulo de cabeceo del helicóptero escala a reducida se presenta en la figura 3.

VI. COLOCACIÓN DE LAS SEÑALES DE CONTROL

La estrategia de control presenta dos entradas u_1 y u_2 , que representan el empuje vertical y horizontal respectivamente. Estas entradas de control son manejadas por la inclinación del rotor y el incremento del empuje del rotor principal, como se observa en la ecuación (8).

La colocación de las señales de control se realizan a partir de las expresiones $a = X_M/Z_M$ y $T_{MR} = Z_{MR}$. Además la inclinación de a depende del mando cíclico longitudinal δ_{lon} , cuya dinámica se observa en la ecuación (6). Si se desprecia a los términos que involucran el mando lateral, la

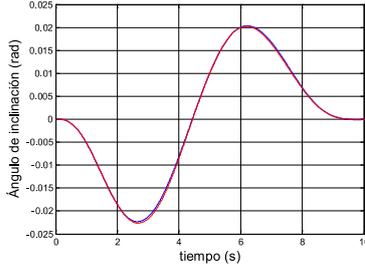


Figura 3: Seguimiento de la trayectoria para el ángulo de cabeceo.

velocidad inducida lateral, la inclinación del rotor lateral, las velocidades angulares del fuselaje y la eliminación de la dinámica de la barra estabilizadora, el modelo (6) queda

$$\tau_f \dot{a} = -a \left(1 + \frac{\mu^2}{2} \right) + A_{lon} \delta_{lon} (1 + 3\mu^2) \quad (18)$$

considerando que la dinámica del rotor es una dinámica rápida en comparación con dinámica del fuselaje del helicóptero a escala reducida, la ecuación anterior se puede escribir como

$$0 = -a \left(1 + \frac{\mu^2}{2} \right) + A_{lon} \delta_{lon} (1 + 3\mu^2) \quad (19)$$

entonces la entrada real del sistema es el mando ciclico longitudinal δ_{lon} para el movimiento sobre el eje x^I , y se obtiene al despejarla de la ecuación (19).

$$\delta_{lon} = \frac{a \left(1 + \frac{\mu^2}{2} \right)}{A_{lon} (1 + 3\mu^2)}$$

El comportamiento del mando ciclico longitudinal se muestra en la figura 4a. Reflexionando que la dinámica del rotor es un sistema de primer orden y que hasta el momento se ha considerado solamente como una relación algebraica de la forma $a = X_M/Z_M$. Ahora, se pretende observar que tanto afecta esta consideración al compararla con la ecuación (19) mediante la graficación de ambas expresiones, como se muestra en la figura 4b. Finalmente se verifica que no hay una diferencia considerable entre ambas señales.

VII. CONCLUSIONES

Este artículo presentó una estrategia de control no lineal para la dinámica longitudinal de un helicóptero a escala reducida. La estrategia de control se basa en el algoritmo para construir reguladores estáticos para sistemas linealizables por retroalimentación dinámica de estados. Las propiedades de planitud diferencial de la dinámica longitudinal se emplean para diseñar las trayectorias deseadas. Aunado a esto, se muestra la colocación de las señales de control en los mandos de control del sistema real, y como la dinámica del rotor puede ser sustituida por una relación algebraica.

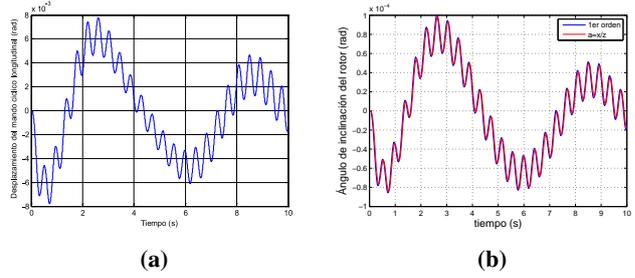


Figura 4: (a) Respuesta del mando ciclico (δ_{lon}), (b) Comparación de inclinación del rotor mediante las expresiones de un sistema de primer orden y la relación $a = X/Z$

VIII. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, México, y al Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal, ICyTDF, México, en virtud de la concesión 102390 y 263/2010, respectivamente.

REFERENCIAS

- Padfield, G. D. (1996). *Helicopter Flight Dynamics: The theory and Application of the Flying Qualities and Simulation Modeling*. AIAA Education Series.
- Kuipers, J. B. (1999). *Quaternions and Rotation Sequences, A Primer with Application to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality*. Princeton University Press.
- Raptis, A. and Valavanis, K. P. (2010). *Linear and Nonlinear Control of Small-Scale Unmanned Helicopter*. Springer, 2010.
- Sira-Ramírez, H. Castro-Linares, R. y Licéaga-Castro, E. (2000). A Liouvilian systems approach for the trajectory planning-based control of the helicopter models. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2000. **37**, 1239–1245.
- Martin, P, Devasia, S. y Paden, Brad (1996). A Different Look at Output Tracking Control of a VTOL Aircraft. *Automatica* **32**:101–107.
- Koo, T. J. y Sastry, S. (1998). Output Tracking Control Design of a Helicopter Model Based on Approximate Linearization. *Conference on Decision and Control*.
- Rodríguez, H. Astolfi, A. y Ortega, R. (2006). On the construction of static stabilizer and static output trackers for dynamically linearizable systems, related results and applications. *International Journal of Control*. **79**, 1523–1537.
- Kaliora, G. y Astolfi, A. (2004). Nonlinear Control of Feedforward Systems with Bounded Signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **49**, 1975–1990.
- Fantoni, I y Lozano, R. (2002). *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer. Great Britain.
- Layton, D. M. (1984). *Helicopter Performance*. Matrix Publisher, Inc.
- Mettler, B. (1996). *Identification Modelling and Characteristics of Miniature Rotorcraft*. AIAA Education Series.
- Ollero, A. Hommel, G. Gancet, J. Gutierrez, L-G. Viegas, D.X. Wiklund, J. and Gonzáles, M. A. (1996). COMETS: A Multiple Heterogeneous UAV System. *IEEE International Workshop on Safety, Security, and Rescue Robotics*.
- Cai, G. Feng, L. Chen, B. M. and Lee, T. H. (2008). Systematic design methodology and constructio of UAV helicopters, *Mechatronics*. **18**, 545-558.